ANALYSE ET EVALUATION D'UN MODELE

Daniel Wallach

INRA Environnement & Agronomie

UMR ARCHE

Plan

Analyse de sensibilité

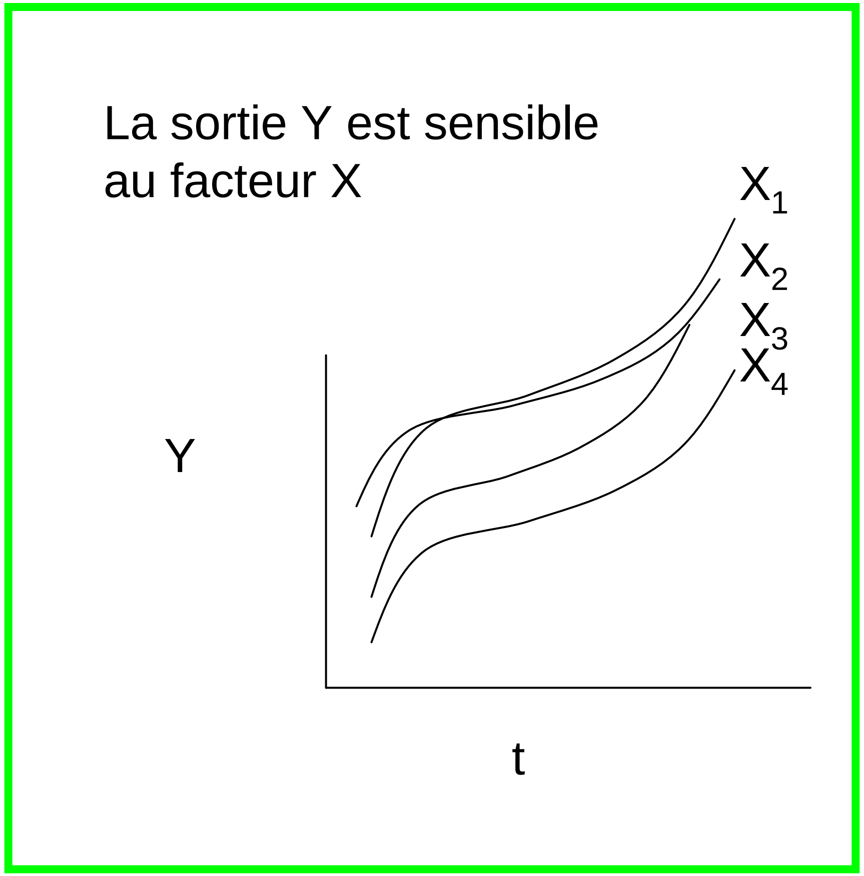
Evaluation

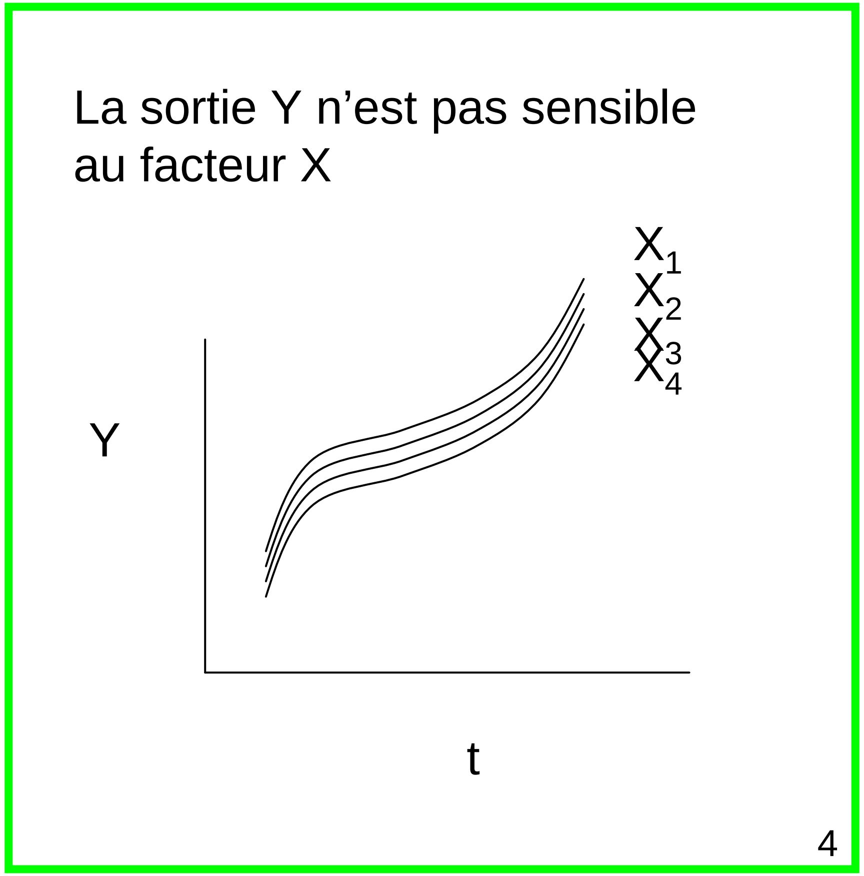
- Comparaison modèle-observations
- Qualité de prédiction
- Quel niveau de complexité pour un modèle?

Analyse de sensibilité

C’est quoi?

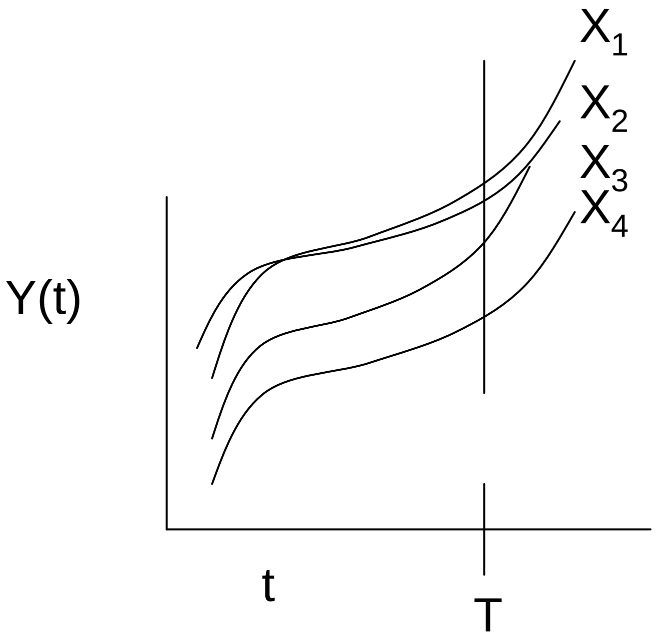
- Analyser comment les sorties varient en fonction des facteurs d’entrée



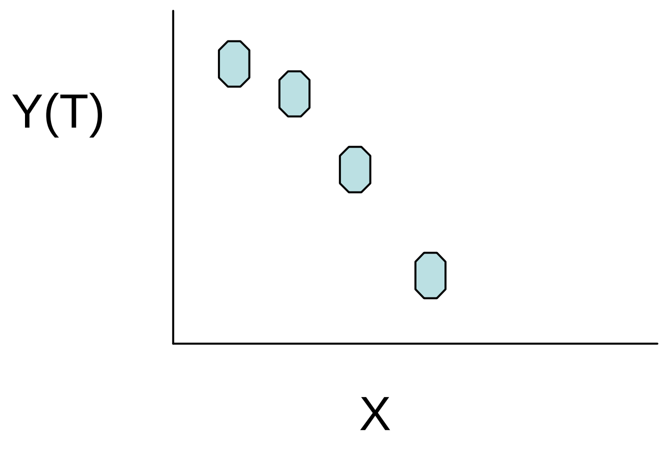


Autre présentation

La sortie Y(t) en fonction de t pour plusieurs X

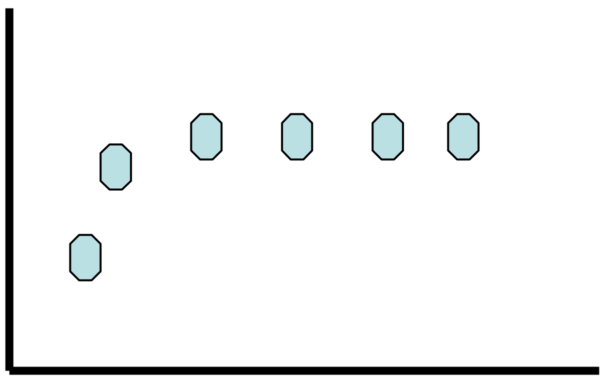


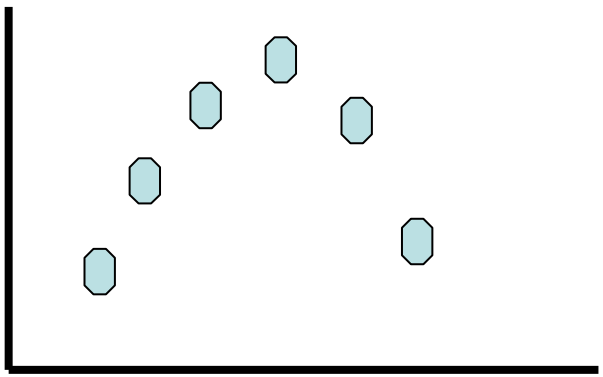
La sortie Y(T) en fonction de X



Pourquoi (1) ?

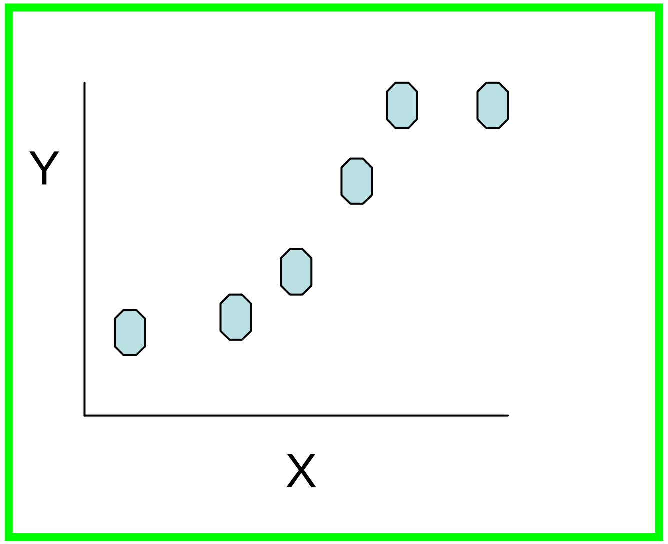
- Explorer comment les sorties varient en fonction des entrées
- Vérifier le comportement général du modèle

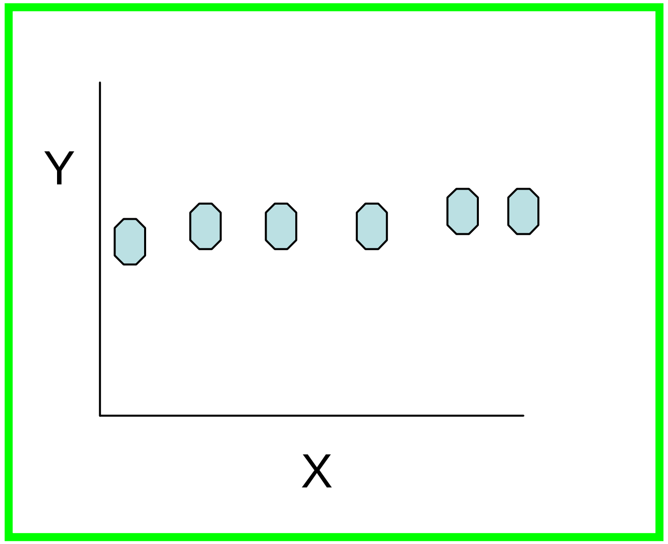




Pourquoi (2)?

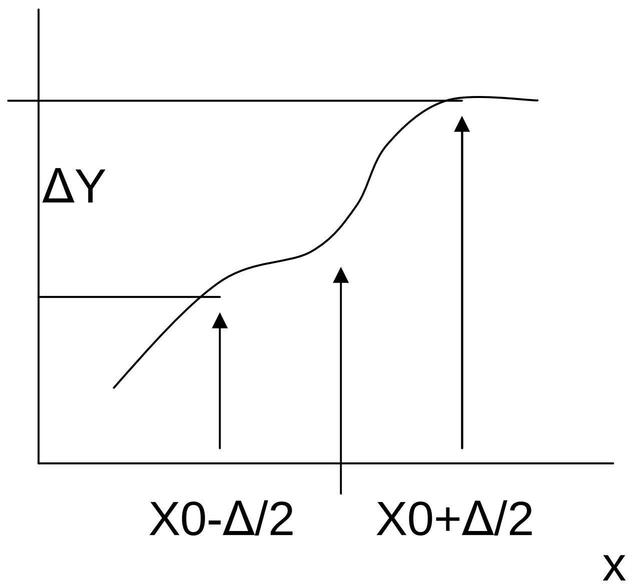
- Identifier facteurs (paramètres ou entrées) importants
- Identifier facteurs dont l'estimation est cruciale
- Explorer possibilités de simplification





Indice de sensibilité

- $\Delta Y / \Delta X$



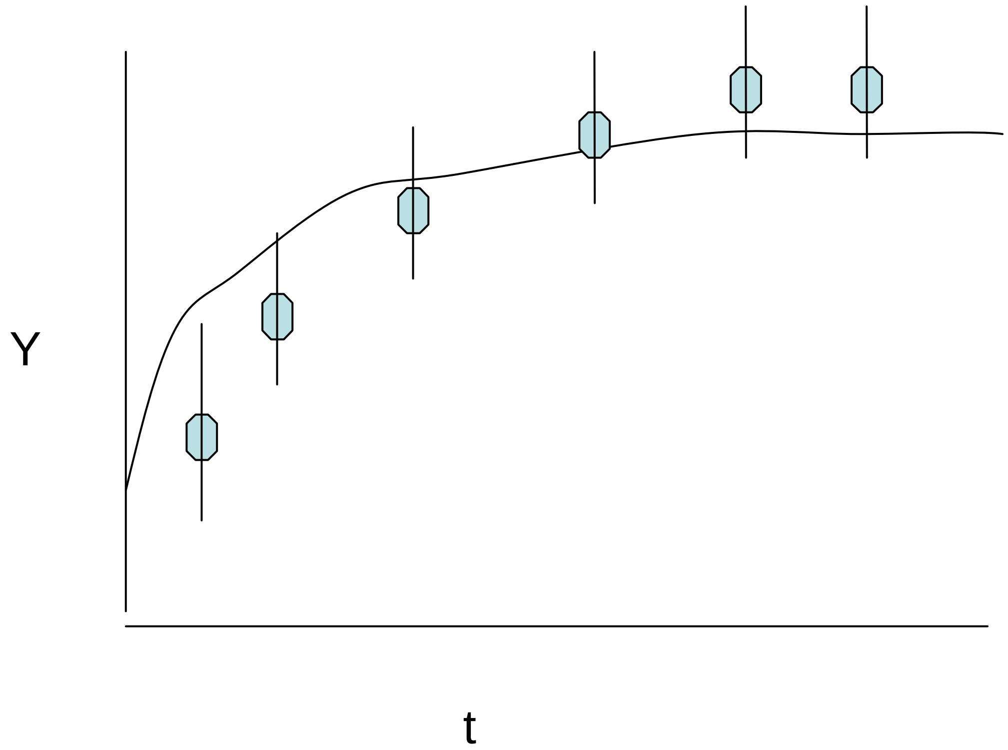
Evaluation

Evaluation. Pourquoi?

- Nécessaire pour démarrer
  – Définir objectif, critère de qualité
- Nécessaire pour améliorer le modèle
- Nécessaire pour l'utilisateur

Comparaison entre valeurs calculées par le modèle et valeurs observées

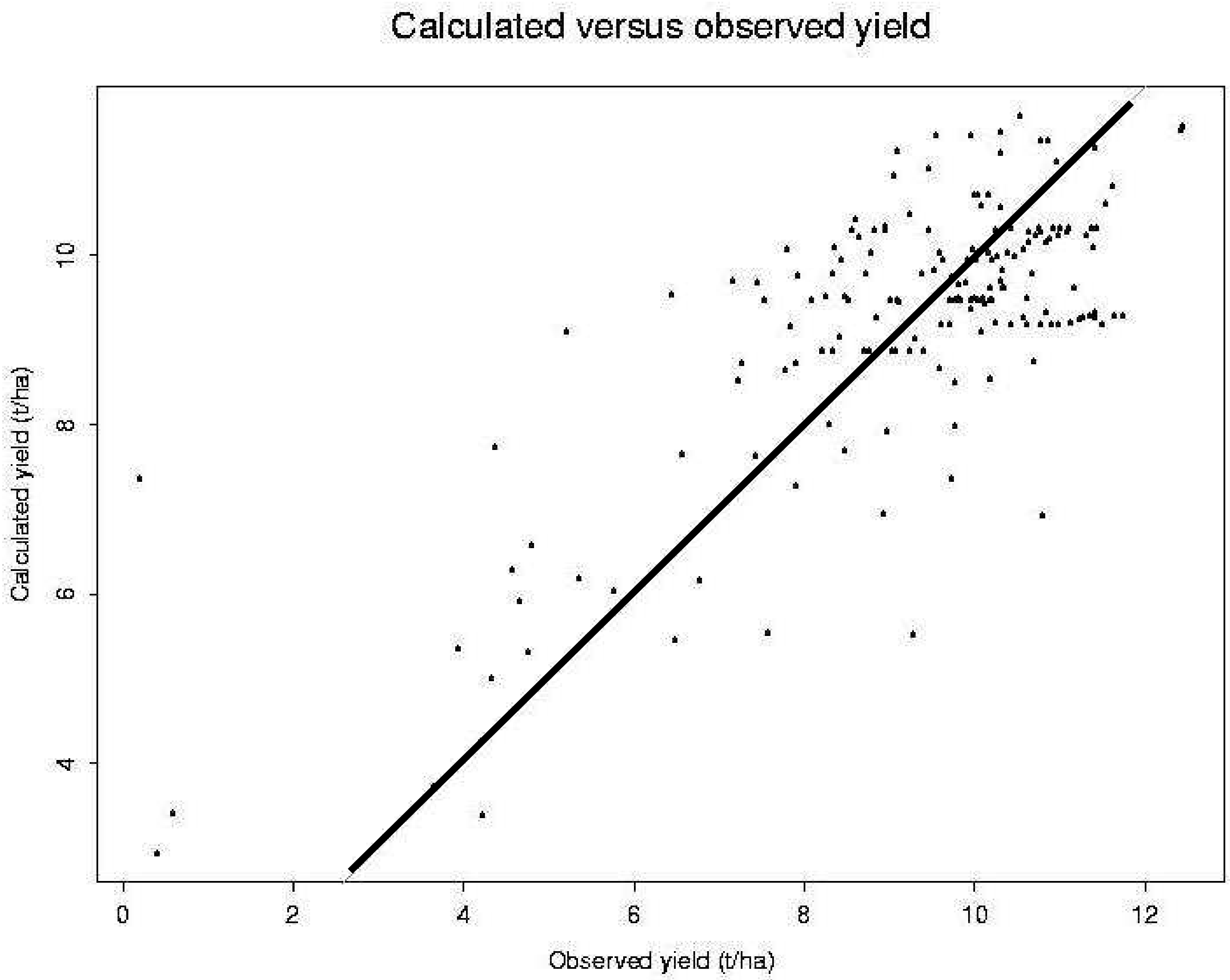
Graphique avec valeurs calculées et observations (plusieurs réponses, une situation)



Graphique avec valeurs calculées et observations (une réponse, plusieurs situations)

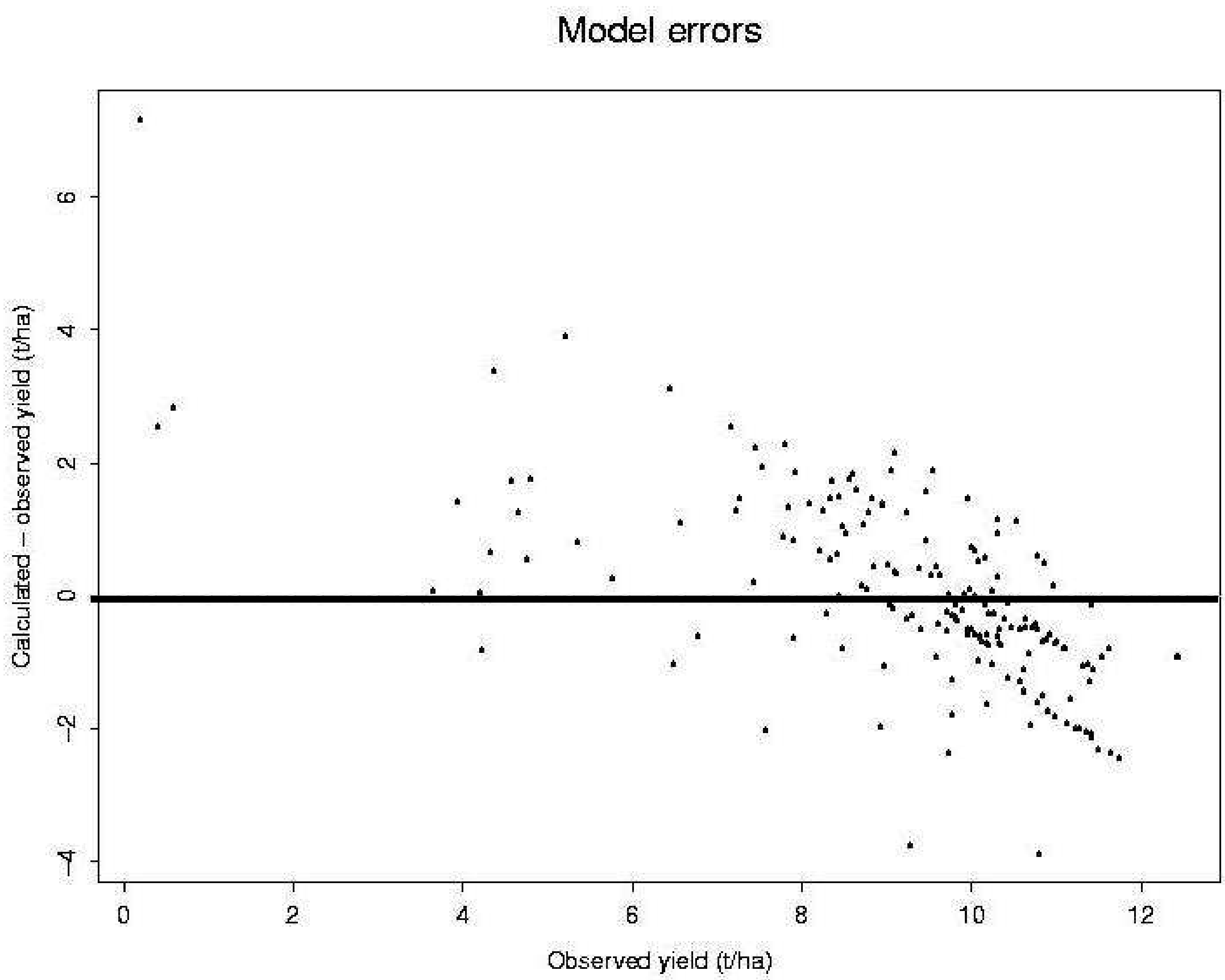
- Valeurs calculées contre valeurs observées

Comparaison modèle-observations



Graphique avec valeurs calculées et observations (une réponse, plusieurs situations)

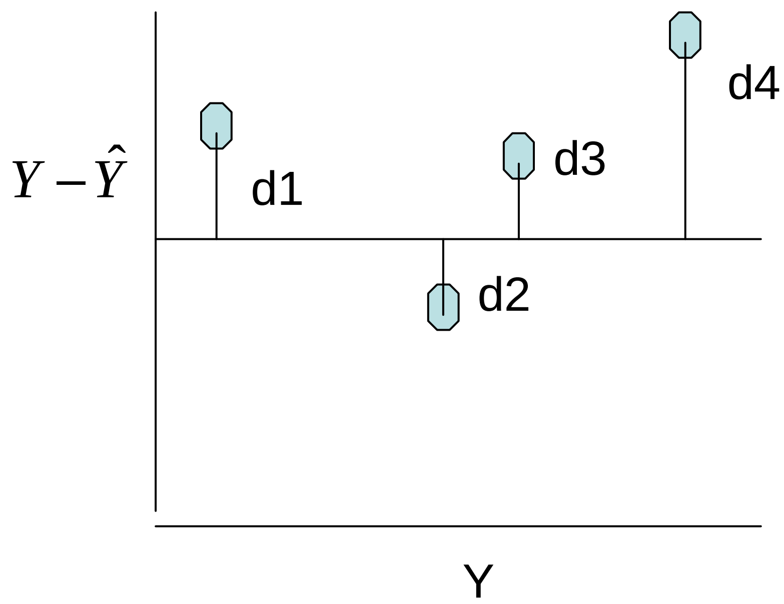
- Valeurs des résidus contre valeurs observées.


Model errors
Calculated – observed yield (t/ha)
Observed yield (t/ha)
-4
-2
0
2
4
6
0
2
4
6
8
10
12

Mesure numérique (1)

- L'erreur quadratique moyenne (Mean Squared Error MSE)

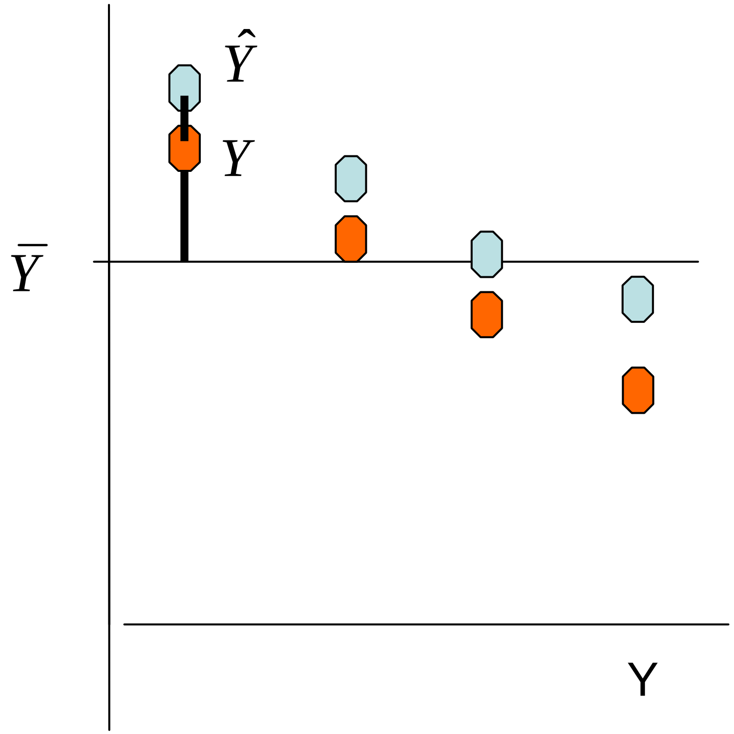
$$MSE = (1/N)\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \hat{Y}_i)^2$$



Mesure numérique (2)

- L'efficience

$$EF = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}$$

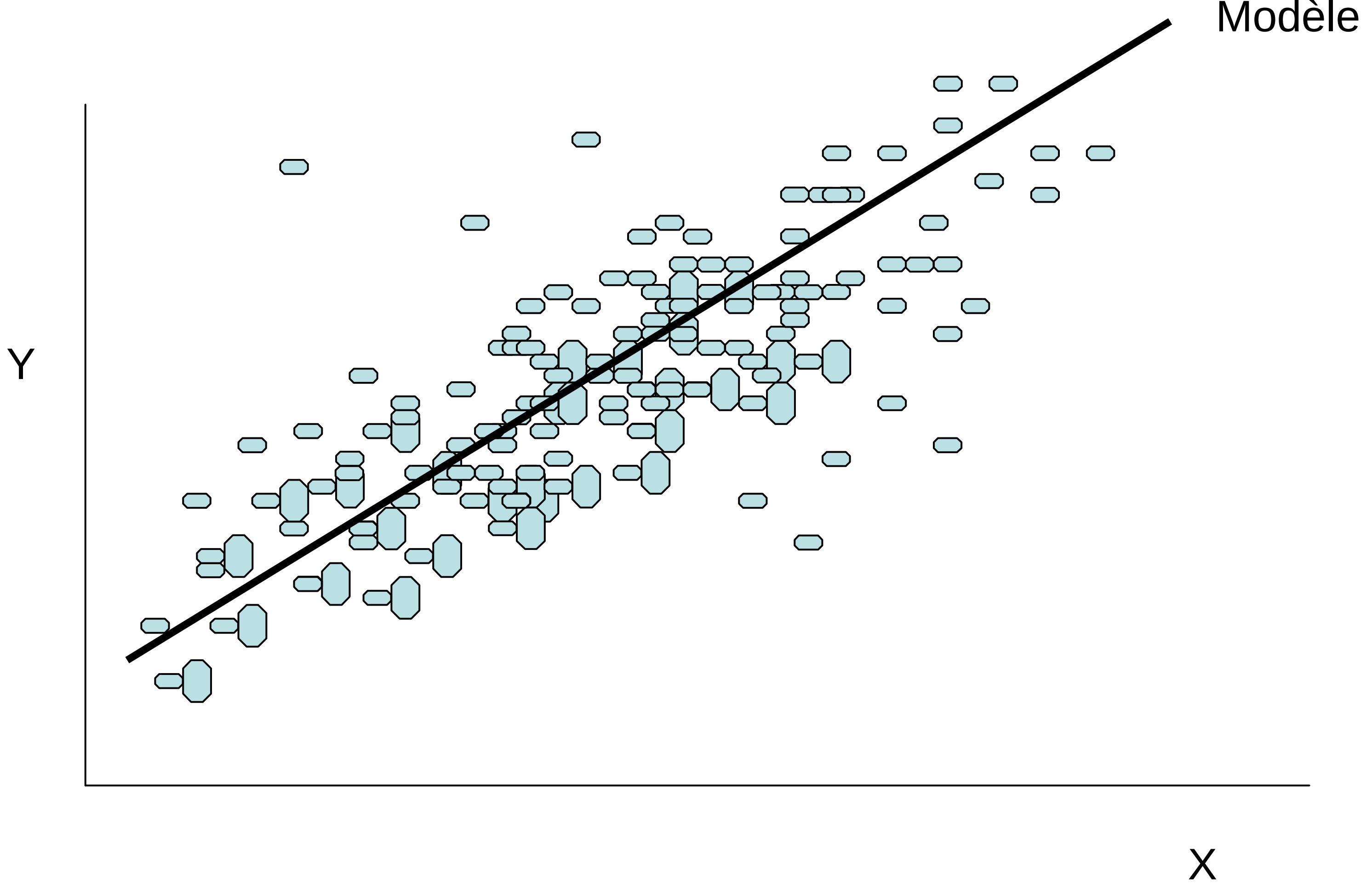


$$\hat{Y}_i = Y_i \Rightarrow EF = 1 \qquad \hat{Y}_i = \overline{Y} \Rightarrow EF = 0$$

Évaluation. Erreur de prédiction

Erreur de prédiction

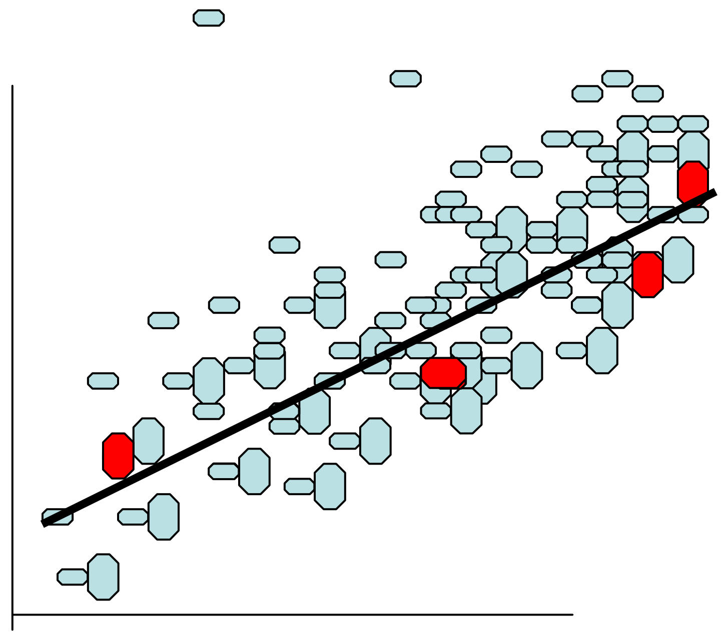
C’est quoi?



Critère de qualité de prédiction

- MSEP=erreur quadratique moyenne de prédiction (Mean squared error of prediction)

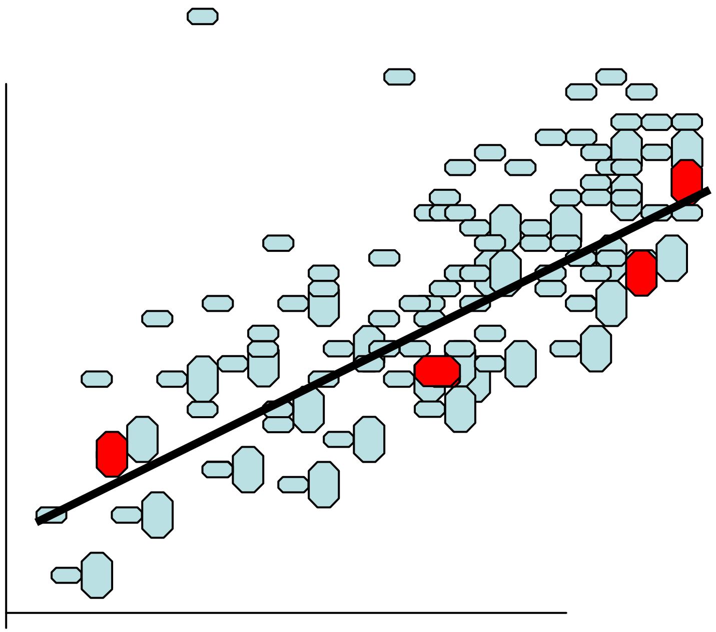
$$MSEP = E\left[\left(Y - \hat{Y}\right)\right]^2$$



Rappel $MSE = (1/N)\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \hat{Y}_i)^2$

Estimation de MSEP

- MSEP ressemble à MSE. Peut-on alors utiliser MSE pour estimer MSEP?
  - Si les mesures sont un échantillon de la distribution cible
  - Si les données n'ont pas été utilisés pour estimer les paramètres du modèle.



Exemple de la différence entre MSE et MSEP

- 8 observations (Y,x1,x2,x3,x4,x5)

$$Y = \theta^{T0} + \theta^{T1}x_1 + \theta^{T2}x_2 + \theta^{T3}x_3 + \theta^{T4}x_4 + \theta^{T5}x_5 + \varepsilon \quad \varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$$

- 5 modèles linéaires

$$\hat{Y}_{2\ paramètres} = \theta^{(0)} + \theta^{(1)}x_1$$

$$\hat{Y}_{3\ paramètres} = \theta^{(0)} + \theta^{(1)}x_1 + \theta^{(2)}x_2$$

$$\hat{Y}_{4\ paramètres} = \theta^{(0)} + \theta^{(1)}x_1 + \theta^{(2)}x_2 + \theta^{(3)}x_3$$

$$\hat{Y}_{5\ paramètres} = \theta^{(0)} + \theta^{(1)}x_1 + \theta^{(2)}x_2 + \theta^{(3)}x_3 + \theta^{(4)}x_4$$

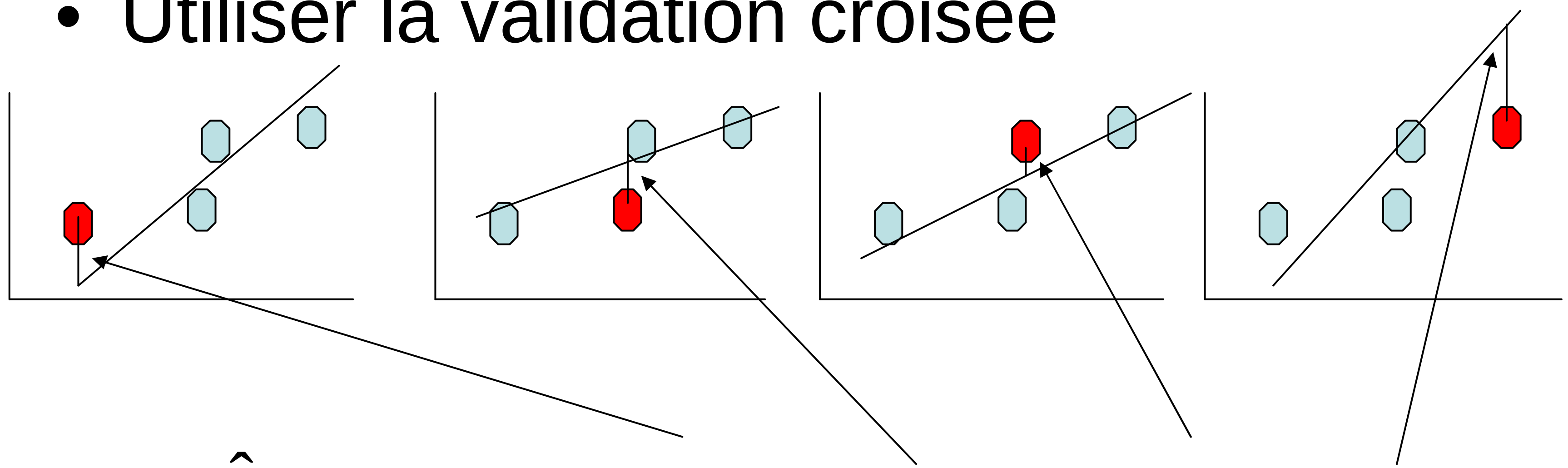
$$\hat{Y}_{6\ paramètres} = \theta^{(0)} + \theta^{(1)}x_1 + \theta^{(2)}x_2 + \theta^{(3)}x_3 + \theta^{(4)}x_4 + \theta^{(5)}x_5$$

Erreur de prédiction

Modèle	Paramètres à estimer Valeurs estimées par moindres carrées	Λ	Δ	$MSEP(\hat{\theta})$	MSE
2 params	$\theta^{(0)},\theta^{(1)}$ 2.535, 8.275	4.04	0.36	4.40	4.61
3 params	$\theta^{(0)},\theta^{(1)},\theta^{(2)}$ 2.121, 8.005, 2.065	0.04	0.02	0.06	0.01
4 params	$\theta^{(0)},\theta^{(1)},\theta^{(2)},\theta^{(3)}$ 2.046, 7.971, 2.085, 0.091	0.04	0.01	0.05	0.01
5 params	$\theta^{(0)},\theta^{(1)},\theta^{(2)},\theta^{(3)},\theta^{(4)}$ 1.906, 7.906, 2.036, 0.169, 0.156	0.04	0.05	0.09	0.004
6 params	$\theta^{(0)},\theta^{(1)},\theta^{(2)},\theta^{(3)},\theta^{(4)},\theta^{(5)}$ 1.641, 7.735, 1.967, 0.237, 0.230, -0.174	0.04	0.35	0.39	0.0003

Comment estimer MSEP si MSE n’est pas un bon estimateur?

- Diviser le jeu de données en deux parties
  - Estimer les paramètres sur une partie, calculer MSEP sur la deuxième partie
- Utiliser la validation croisée



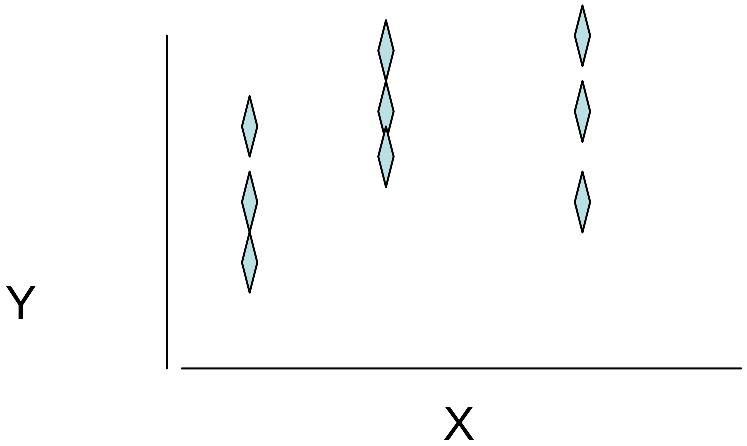
$$\hat{M}SEP = (1/4)(MSE_1 + MSE_2 + MSE_3 + MSE_4)$$

Niveau de complexité

$$MSEP = \Lambda + \Delta$$

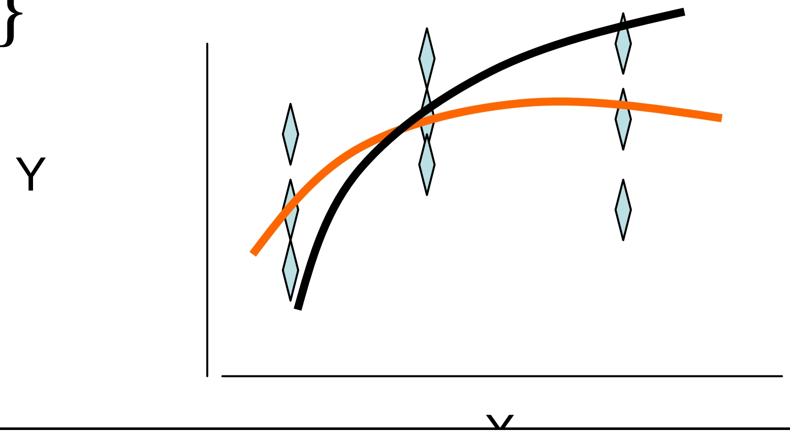
$$\Lambda = E_X\left[\operatorname{var}\,(Y|X)\right]$$

$= $ population variance



$$\Delta = E_X\{\,[E_Y(Y|X) - \hat{Y}(X)]^2\}$$

$= $ squared bias



Niveau de complexité

Model	Parameters in the model Least squares parameter values	Λ	Δ	$MSEP(\hat{\theta})$	MSE
$f_1(X;\ \theta)$	$\theta^{(0)}, \theta^{(1)}$ 2.535, 8.275	4.04	0.36	4.40	4.61
$f_2(X;\ \theta)$	$\theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}$ 2.121, 8.005, 2.065	0.04	0.02	0.06	0.01
$f_3(X;\ \theta)$	$\theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)}$ 2.046, 7.971, 2.085, 0.091	0.04	0.01	0.05	0.01
$f_4(X;\ \theta)$	$\theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)}, \theta^{(4)}$ 1.906, 7.906, 2.036, 0.169, 0.156	0.04	0.05	0.09	0.004
$f_5(X;\ \theta)$	$\theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)}, \theta^{(4)}, \theta^{(5)}$ 1.641, 7.735, 1.967, 0.237, 0.230, -0.174	0.04	0.35	0.39	0.0003

FIN