Modèles mathématiques de quoi s'agit-il?

Modèle mathématique

- Une série d’équations ou de représentations graphiques qui décrivent des relations entre variables d’une manière précise.
  - Des modèles mathématiques sont utilisés particulièrement en biologie, ingénierie électrique et physique mais également dans d’autres domaines comme en économie, sociologie et science politique.

Objectifs de cette présentation

- Présenter différents types de modèle mathématiques

- Faire passer un message d’espoir
  - Le choix est largement déterminé par
    - le problème
    - les informations disponibles

Plan

- Modèle statique déterministe $Y=f(X;\theta)$
- Modèle statique stochastique$Y=f(X;\theta)+\varepsilon$
- Modèle dynamique déterministe $dY/dt=f(Y(t),X(t);\theta)$
- Modèle dynamique stochocastique $dY/dt=f(Y(t),X(t);\theta)+ \varepsilon(t)$
- Modèle de type EDP
- Modèle individu-centré

Une équation

- $Y=f(X;\theta)$

Une équation. Exemple 1

- $Y=a_0+a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3+a_4X_4$

  Y =rendement de blé dans un département

  X_1= température moyenne période 1

  X_2= pluviométrie période 1

  X_3= pluviométrie période 2

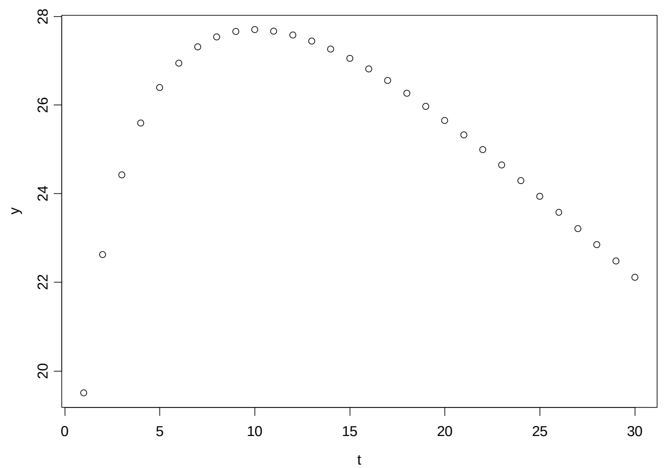
  X_4= rayonnement total

  $\theta = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$

Modèle statique déterministe

Une équation. Exemple 2

$$Y(t) = k_1 t^{k_2} e^{-k_3 t}$$



Y(t)=production de lait, semaine t

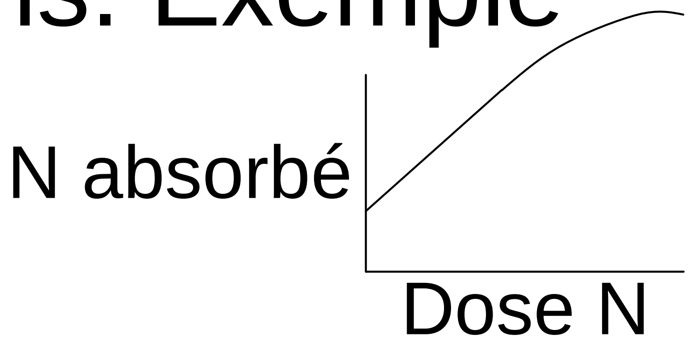
$\theta = (k_1, k_2, k_3)$ $Y=f(X; \theta)$

Plusieurs équations

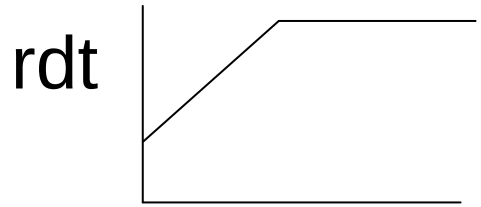
$$
\begin{aligned}
Y_1 &= f_1(Y, X; \theta) \\
Y_2 &= f_2(Y, X; \theta) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

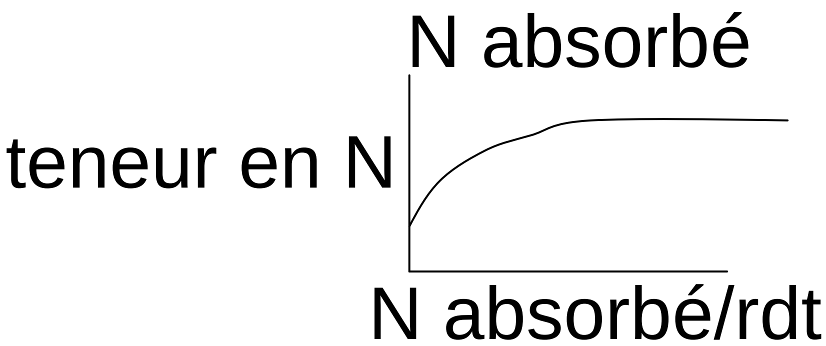
Modèle statique déterministe

Plusieurs équations. Exemple



- N absorbé =f(dose N; θ)
- Rdt=f(N absorbé; θ)
- Teneur en N=f(N absorbé, rdt; θ)



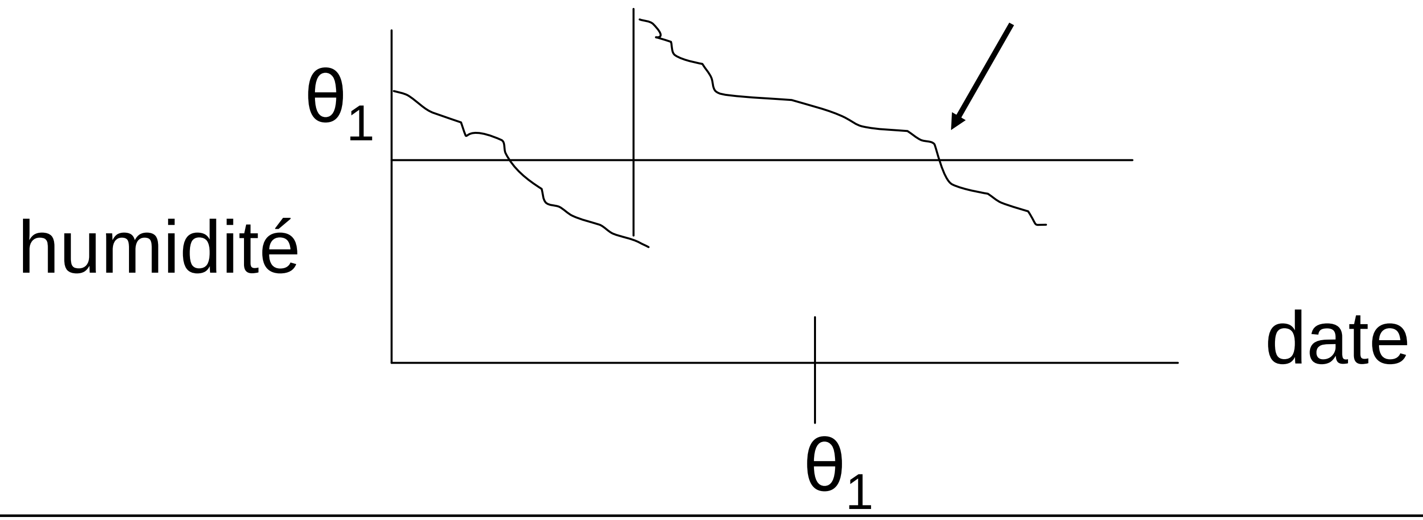


Relation implicite

- Un algorithme plutôt qu'une équation

Relation implicite. Exemple

- Date de semis en fonction de l'humidité du sol
  - SI (date > θ_1) ET (humidité 0-30 cm > θ_2) ALORS sème



Ce type de modèle est adapté si…

- Information de type (Y_1, X_1), (Y_2, X_2) …
- On suppose une relation simple entre Y et X

Modèle statique stochastique

$$Y=f(X;\,\theta)+\varepsilon$$

– ε est une variable aléatoire

– ε décrit en termes statistiques ce que l'on n'arrive pas à prédire avec le modèle de réponse.

– Il faut modéliser la partie statistique

Exemple

$$Y=a_0+a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3+a_4X_4+\varepsilon$$

$$\varepsilon\sim N(0,\sigma^2)$$

Ce type de modèle est adapté si…

- Information de type (Y_1, X_1), (Y_2, X_2) …
- On suppose une relation simple entre Y et X
- On a besoin d'un traitement explicite des erreurs
  - Pour l'estimation des paramètres
  - Evaluation de la qualité de prédiction

Modèle dynamique déterministe

$$dY_1 / dt = f_1(Y(t), X(t); \theta)$$

$$Y_2 / dt = f_2(Y(t), X(j); \theta)$$

$$\vdots$$

$$\left[Y_1(t+\Delta t) - Y_1(t)\right] / \Delta t = f_1(Y(t), X(t); \theta)$$

$$\left[Y_2(t+\Delta t) - Y_2(t)\right] / \Delta t = f_2(Y(t), X(t); \theta)$$

$$\vdots$$

Exemple. Réaction chimique

$$\frac{dn_1}{dt} = -\alpha n_1$$

$$\frac{dn_2}{dt} = \alpha n_1 - \beta n_2$$

$$\frac{dn_3}{dt} = \beta n_2$$

n1 → n2 → n3

Exemple. Croissance d'une plante

$$BM(j+1) - BM(j) = \Delta BM = \theta_0 R(j) e^{-\theta_2 LAI(j)}$$

$$LAI(j+1) - LAI(j) = \theta_1 \Delta BM$$

Intégration

$$j = 1$$

$$\Delta BM = \theta_0 R(1) e^{-\theta_2 LAI(0)}$$

$$BM(1) = BM(0) + \theta_0 R(1) e^{-\theta_2 LAI(0)}$$

$$LAI(1) = LAI(0) + \theta_1 \theta_0 R(1) e^{-\theta_2 LAI(0)}$$

Modèle dynamique déterministe

$$j = 2$$

$$\Delta BM = \theta_0 R(2) e^{-\theta_2 LAI(1)}$$

$$BM(2) = BM(1) + \theta_0 R(2) e^{-\theta_2 LAI(1)}$$

$$= BM(0) + \theta_0 R(1) e^{-\theta_2 LAI(0)} + \theta_0 R(2) e^{-\theta_2 \left[LAI(0) + \theta_1 \theta_0 R(1) e^{-\theta_2 LAI(0)} \right]}$$

$$LAI(2) = LAI(1) + \theta_1 \theta_0 R(2) e^{-\theta_2 LAI(1)}$$

$$= LAI(0) + \theta_1 \theta_0 R(1) e^{-\theta_2 LAI(0)} + \theta_1 \theta_0 R(2) e^{-\theta_2 \left[LAI(0) + \theta_1 \theta_0 R(1) e^{-\theta_2 LAI(0)} \right]}$$

Deux formes

- Les équations dynamiques
  - Nos connaissances sont de cette forme
- Les équations statiques après intégration
  - Pour faire le lien avec des observations

Pourquoi équations dynamiques?

- Pas toujours nécessaire
- Avantages:
  - Permet de faire le lien entre fonctionnement du système et connaissances sur les processus (lien INRA-ICTA)
  - Permet d'exploiter des connaissances sur les processus (équations et données)
  - Permet de faire des modèles complexes à partir d'équations simples.
  - Permet d'étudier multiples aspects du système
- Désavantage:
  - Difficile de connaître comportement du modèle

Ce type de modèle est adapté si…

- On veut calculer des trajectoires dans le temps
- On a des informations sur le comportement dynamique du système

ou

- On veut calculer certaines réponses
- On a des informations sur le comportement dynamique du système

Modèle dynamique stochastique

- Modèle dynamique avec une partie aléatoire
- Deux façons pour introduire une erreur aléatoire
  - Dans les équations de réponse

$$Y(t)=f(X;\ \theta)+\varepsilon$$

  - Dans les équations dynamiques

$$dY(t)/dt=f(Y(t),X(t);\theta) + \varepsilon(t)$$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES PARTIELLES

- Pour des systèmes qui varie en fonction de plusieurs variables continues

EXEMPLE (1)

- Population qui varie dans le temps et dans l'espace. Diffusion+ reproduction
  - N=densité d'individus (t,x,y). P=vitesse de reproduction. D=constante de diffusion

$$\frac{\partial N(t,x,y)}{\partial t} = D\left[\frac{\partial^2 N(t,x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N(t,x,y)}{\partial y^2}\right] + \rho N(t,x,y)$$

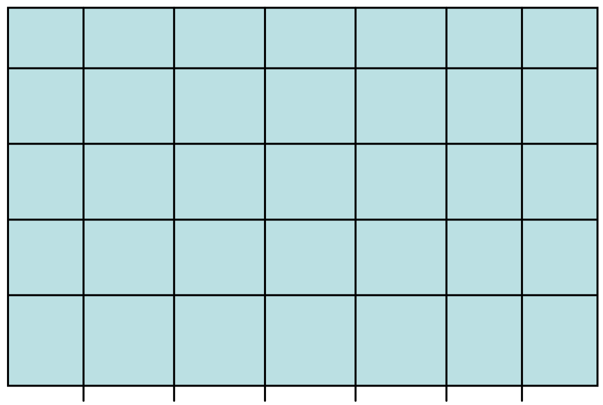
EXEMPLE (2)

- Population avec structure d'âge
  - n(t,a)=fruits d'âge a au temps t
  - r convertit entre temps chronologique et phénologique
  - f(t,a) est le taux de chute des fruits

$$\frac{\partial n(t,a)}{\partial t} + r\frac{\partial n(t,a)}{\partial a} = -f(t,a)n(t,a)$$

Autre solution pour problèmes spatiaux

- Discrétiser l'espace
  - Décrire évolution dans chaque carré
  - Décrire transferts entre carrées



Modèle à base d’EDP

Ce type de modèle est adapté si…

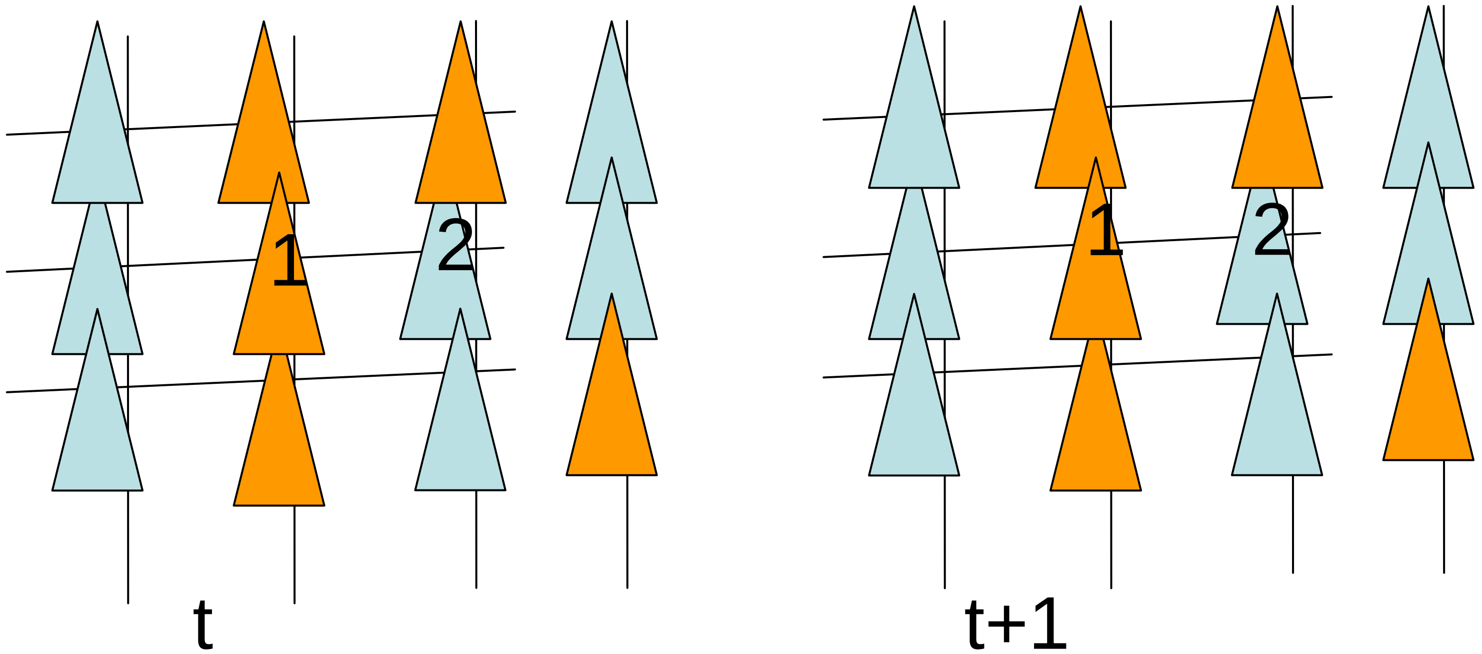
- Les variables d’état varient en fonction de plusieurs variables continues ($Y(t,x,y)$ par exemple).
- Nos connaissances concernent les dérivées par rapport à ces variables

MODELE INDIVIDU-CENTRE

- Un ensemble d’individus
- Des règles de comportement, fonctions de l’environnement local

Exemple

- Si n=2, pas de changement. Si n=3, orange. .Sinon, bleu (n=nombre de voisins orange)



Modèle individu-centré

Ce type de modèle est adapté si…

- On veut faire le lien entre le comportement individuel et le comportement de la population
  - On a des connaissances sur le comportement individuel –
  - on veut simuler le comportement du collectif

ou

  - On a des connaissances sur le comportement collectif –
  - on veut tester des théories sur le comportement individuel

LUNDI APRES MIDI

Les modèles mathématiques – de quoi s'agit-il ?

A quoi servent les modèles ?

Expérimentation et modélisation

INAVI (croissance de poulets de chair)

MARDI MATIN

Construction des équations

Apprentissage de ModelMaker

MARDI APRES MIDI

Approche Systémique et modélisation

BETHA (ITK pour le blé ethanol)

TP ModelMaker

MERCREDI MATIN

Changement d'échelle ou de niveau d'organisation

Modélisation pluriannuelle des assolements en élevage bovin laitier

Informatique et modèles

Exemple d'un modèle multi-agent : PARIS.

MERCREDI APRES MIDI

Modélisation et décisions

Le logiciel MODERATO

Analyse et évaluation

ModelMaker: évaluation et l'analyse

Les logiciels VENSIM et STELLA.

JEUDI MATIN

Estimation des paramètres d'un modèle dynamique

Le modèle Mini-STICS (culture de maïs)

Le modèle IRRIBET (irrigation de la betterave)

FIN