Construction des équations d'un modèle

Jaap van Milgen
UMR Systèmes d'Élevage, Nutrition Animale et Humaine
Saint Gilles
jaap.vanmilgen@rennes.inra.fr

Plan

- un peu de vocabulaire …
- un exemple simple
- l'outillage
- la construction d'un modèle

Modèle linéaire

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$$

(t = 1, 2, ..., n)

- **X_t : variable indépendante**
- **Y_t : variable dépendante, variable de réponse**
- **α, β : paramètres**
- **ε_t : terme stochastique**

Modèle curvi-linéaire

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma X_t^2 + \varepsilon_t$$

(t = 1, 2, ..., n)

- Y_t est non-linéaire par rapport au X_t
- Y_t est <u>linéaire</u> par rapport au vecteur de paramètres

SENAH

Modèle non-linéaire

$$Y_t = \alpha + X_t^{\beta} + \varepsilon_t$$

(t = 1, 2, ..., n)

- **Y_t est non-linéaire par rapport au X_t**
- **Y_t est non-linéaire par rapport au vecteur de paramètres (θ)**
- **$\partial Y_t / \partial \theta$ contient (un élément du) vecteur de paramètres:**

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = 1, \frac{\partial Y}{\partial \beta} = \ln(X) X^{\beta}$$

Éléments pour construire un modèle de simulation

- variables (indépendantes)
  - temps
  - externes
- variables (dépendantes)
  - variables d'état
  - variables de taux
  - variables auxiliaires
- paramètres
- équations (différentielles)

Variable d'état

- une quantité qui défini l'état d'un système à un moment donné (compartiment, pool, réservoir)
- des variables d'état sont indépendantes
- conservée (matière) ou non (le prix)

Variable de taux (flux)

- défini un processus dans le système
- unités: x/temps

Variables auxiliaires

- utilisées pour simplifier la construction, la lecture, …
- calculées à partir d’autres variables (état, taux, auxiliaire)
- exemple:
  - dépôt = synthèse - catabolisme

Un exemple simple:

une baignoire,
de l'eau,
et des enfants ....

Equations différentielles

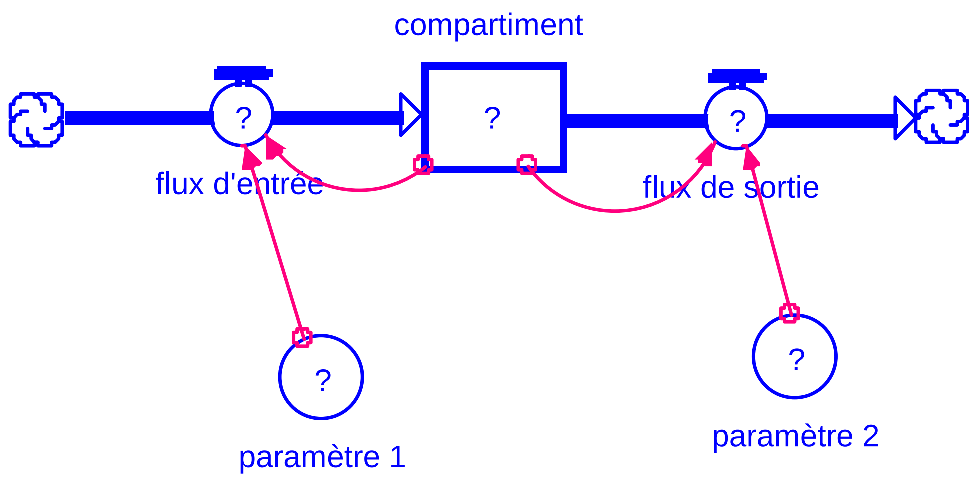
- **dX/dt = ….**
- **taux est (souvent) une fonction de l'état:**
  - **dX1/dt = f(X1, X2, X3; P; E)**
- **intégration:**
  - **analytique**
  - **numérique**

$$\text{flux} = \frac{\partial x}{\partial t} = \underset{t \to 0}{\text{limit}} \left[\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right]$$

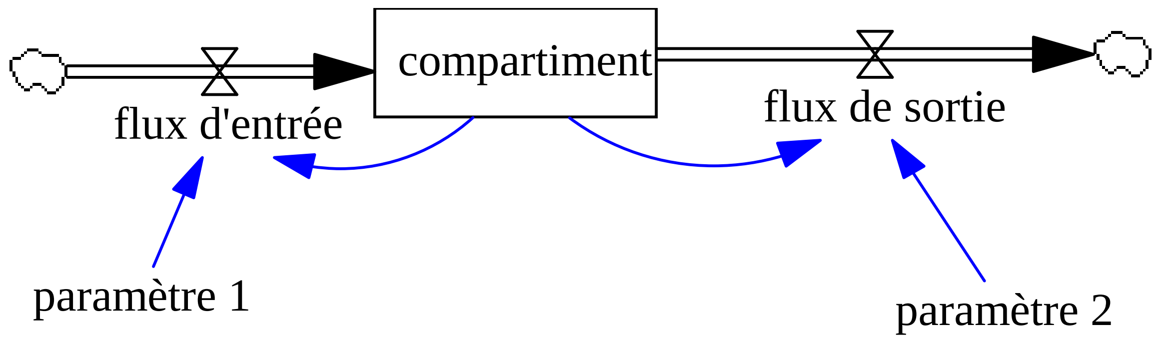
L'outillage

Construire un modèle à compartiments

Stella



Vensim



Les fonctions

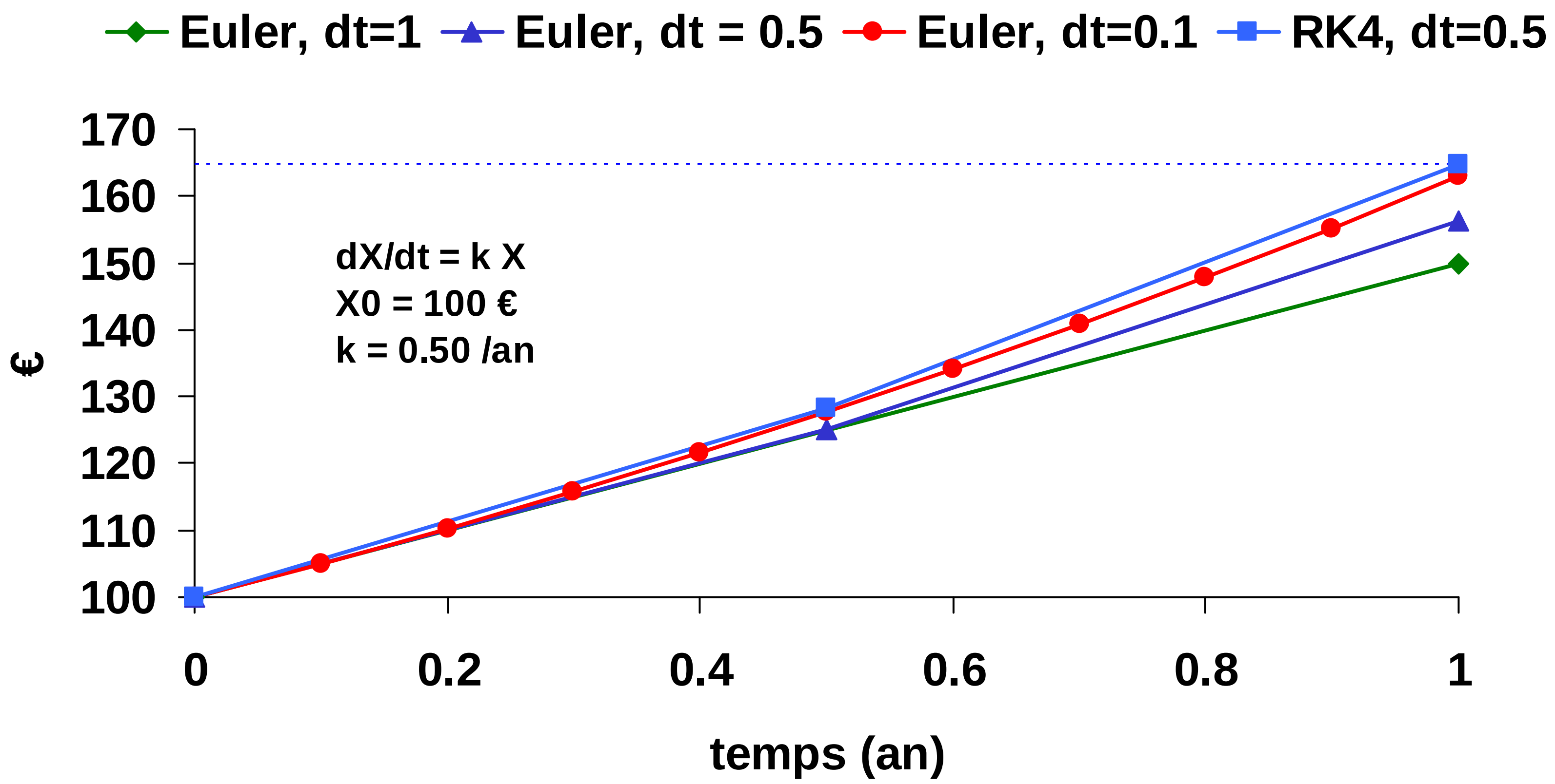
- d’entrées (step, pulse, ramp)
- mathématiques (exp, ln, modulo, …)
- trigonométriques
- logiques (if then else and not or)
- statistiques (random, normal, …)
- autres (delay, smooth, time, dt, …)
- données externes (lookup, …)

SENAH

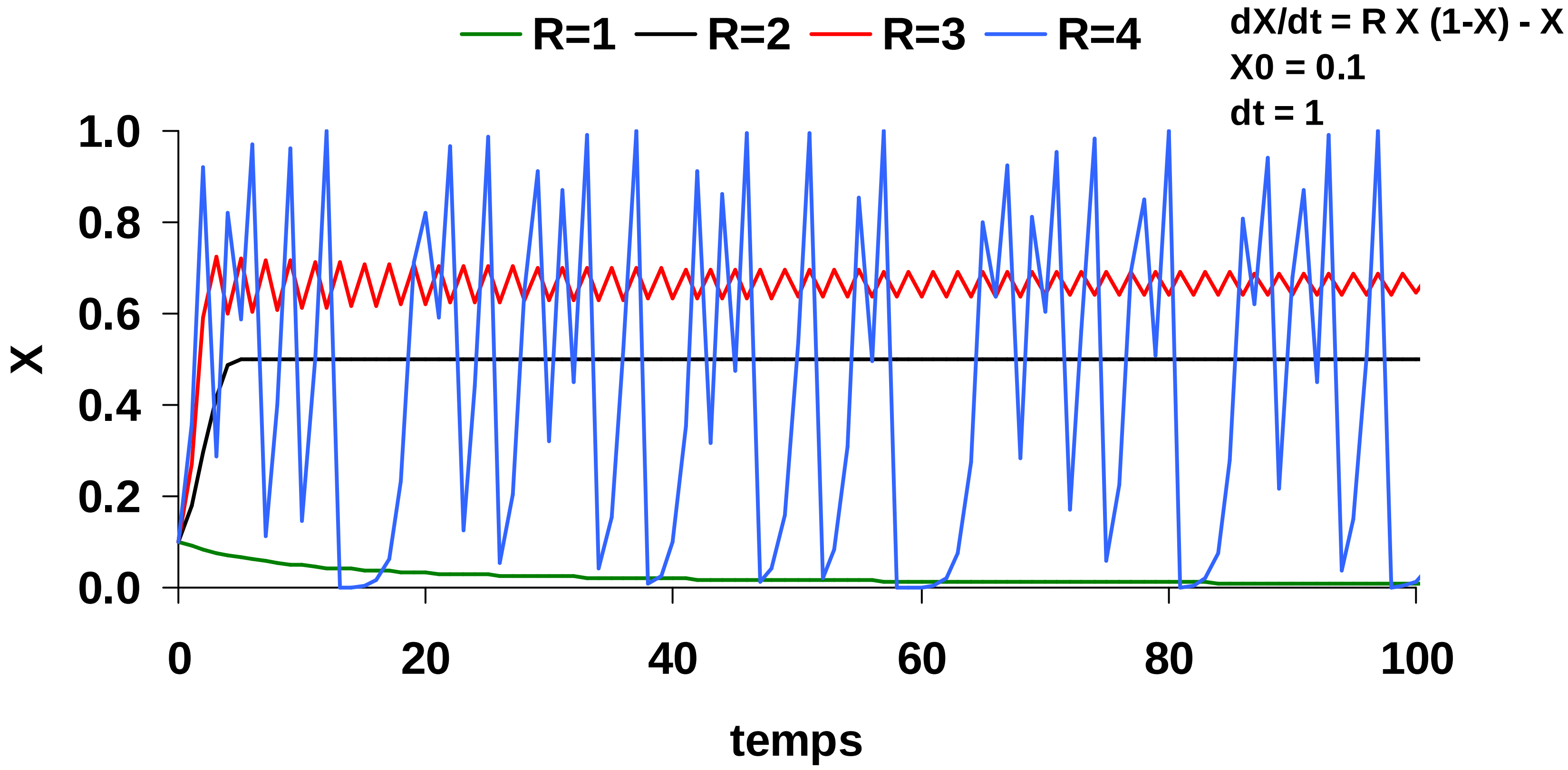
L'intégration numérique

- choisir l'unité de temps
- la (les) condition de termination de la simulation
- plusieurs méthodes d'intégration sont disponibles (Euler, Runge-Kutta, …)
- le pas de temps d'intégration (dt):
  - précision
  - rapidité de calcul
  - risque du comportement chaotique

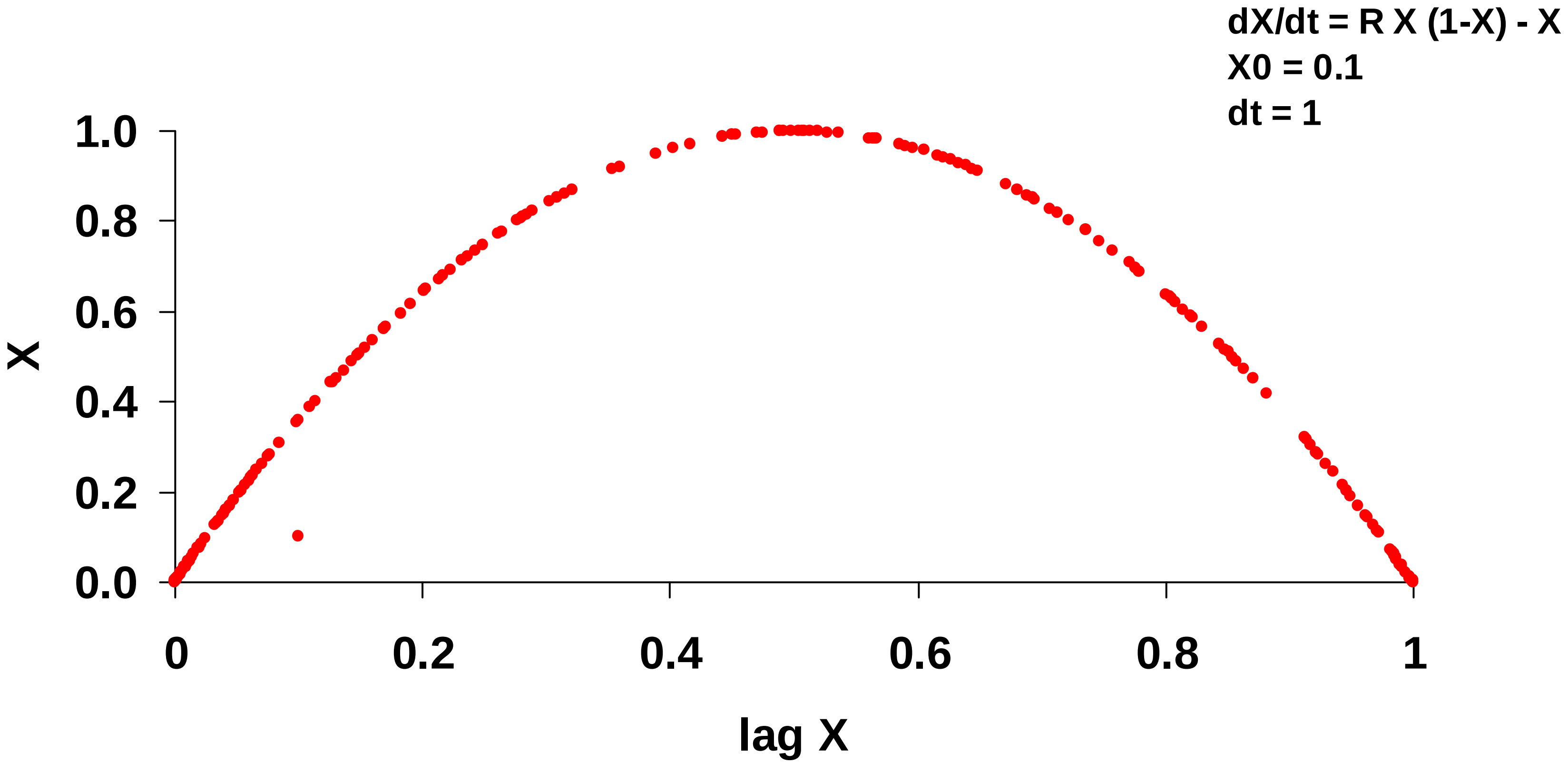
Le pas de temps d'intégration numérique (dt)



Le pas de temps d'intégration numérique (dt)



Le pas de temps d'intégration numérique (dt)



La construction des équations

Quelle base pour construire des équations ?

- vos idées ! (ou des idées d'autres):
  - connaissance
  - pertinence
- approche qualitative
- approche (semi-)quantitative

- catalogues d'équations (en dernier lieu)

Approche qualitative

- commençons simple:
  - structures élémentaires
  - relations
- utilisez des structures/modèles à part pour développer des idées nouvelles
- vérifiez le comportement du modèle en permanence:
  - prévoyez des éléments de contrôle (conservation de la matière, ...)
  - anticipez les résultats

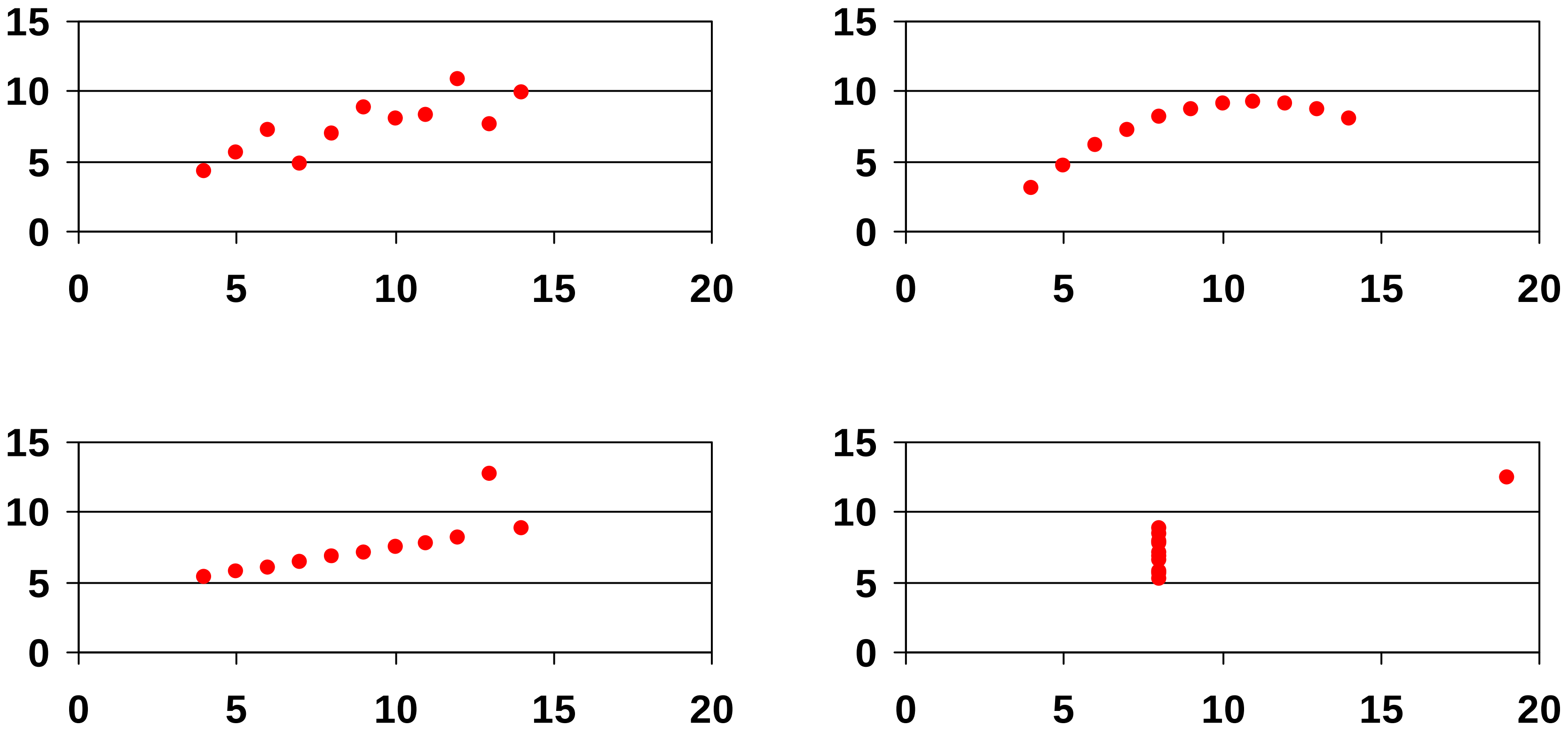
Approche quantitative

- relations existantes (littérature)
- vérifiez les unités des paramètres
- analyse des données pour développer des relations
  - analyse statistique (par ex., méta-analyse)
  - analyse visuelle des données

L'importance de la visualisation des données

	I	II	III	IV
moyenne X	9.000	9.000	9.000	9.000
moyenne Y	7.501	7.501	7.500	7.501
Corrélation	0.8164	0.8162	0.8163	0.8165
Intercepte	3.0001	3.0001	3.0002	3.0002
Pente	0.5001	0.5000	0.4997	0.4999
ET de la pente	0.1179	0.1180	0.1179	0.1178
t (pente = 0)	4.241	4.239	4.239	4.243
SC modèle	27.51	27.50	27.47	27.49
SCE	13.76	13.78	13.76	13.74
R^2	0.6665	0.6662	0.6663	0.6667

L'importance de la visualisation des données



Quelques équations différentielles simples

- **exponentielle:**
  - $dX/dt = k1\ X$
- **asymptotique:**
  - $dX/dt = k1\ (Xf - X)$
- **Michaelin-Menten:**
  - $dX/dt = Vmax\ X / (Km + X)$

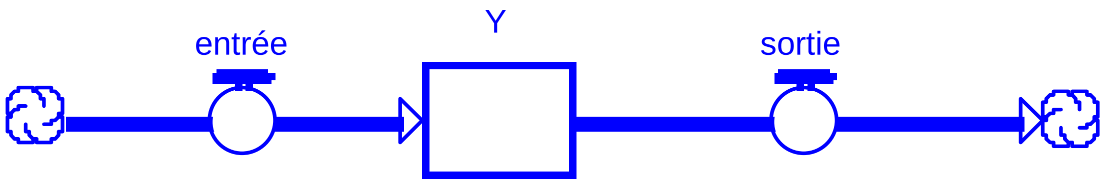
Quelques équations différentielles simples

- **Logistique:**
  - $dX/dt = k1\ X\ (Xf - X)$
- **Gompertz:**
  - $dX/dt = (k1\ \exp(-k2\ t))\ X$
  - $dX/dt = k1\ X\ \ln(Xf/X)$
- **Richards:**
  - $dX/dt = k\ X\ (Xf^n - X^n)\ /\ (n\ Xf^n)$
  - n = -1: asymptotique
  - n = 1: logistique
  - $n \rightarrow 0$: Gompertz

L'indexation de deux variables d'état

- $dX/dt = k\ X$
- on peut imaginer que 'k' atteint sa valeur selon les conditions d'Y:
  - $dX/dt = k\ (1 - Y/Yf)\ X$

Les fonctions de délais



tapis roulant – file d'attente – lave-vaisselle

que peut-t-on en tirer ?

(volume d'attente, temps d'attente)

Bibliographie

- B. Hanon & M. Ruth (1997). Modeling dynamic biological systems. Berlin, Springer.
- J.H.M. Thornley & J. France (2005) Mathematical models in agriculture: quantitative methods for the plant, animal and ecological sciences. Oxon, CABI Publishing.
- D.A. Ratkowsky (1989). Handbook of nonlinear regression models. New York, Marcel Dekker.